

高速球轴承-转子系统动态性能的分析与优化

张锦龙, 王彦伟, 黄正东
(华中科技大学国家 CAD 支撑软件工程技术研究中心, 430074, 武汉)

摘要: 针对轴承刚度随转速呈非线性变化的特点, 基于角接触球轴承拟静力学模型, 考虑轴承内圈离心位移的影响, 运用数值方法对轴承和轴承组的动刚度进行了计算。在此基础上, 根据轴承-转子系统的有限元模型建立了动力学方程, 并编制数值迭代程序求解其特征值, 进而得到了系统的临界转速。由于转速对轴承(组)动刚度的影响, 在每一次迭代计算中, 需根据前次迭代计算出的临界转速求解前、后轴承(组)的动刚度, 重建系统的有限元模型, 因此结合 Matlab 优化工具箱, 运用单纯形法对转子内径与轴承跨距进行了优化。分析结果表明: 通过优化转子内径与轴承跨距, 轴承-转子系统的一阶临界转速提高了 7.65%, 由于转速与内圈离心位移对轴承或轴承组动刚度的影响很大, 因此在高速轴承-转子系统的动态分析中应考虑该影响因素。

关键词: 高速球轴承-转子系统; 角接触球轴承; 动态刚度; 临界转速

中图分类号: TH123 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2013)01-0057-05

Dynamic Performance Analysis and Optimization of High-Speed Rotor-Ball Bearing Systems

ZHANG Jinlong, WANG Yanwei, HUANG Zhengdong
(CAD Center, Huazhong University of Science & Technology, Wuhan 430074, China)

Abstract: Focusing on the nonlinearly changed dynamic stiffness of bearings with working speed, a numerical approach is presented to calculate the dynamic stiffness of a single bearing and a bearing group based on the ball bearing quasi-static model, the dynamic equation is established according to the finite element model of the rotor-ball bearing system, the eigenvalues then are obtained by numerical iteration and the critical speed is sought out. Due to the influence of speed on dynamic stiffness of bearings, the finite element model ought to be updated according to the calculated dynamic stiffness by last iteration. Combining the optimization toolbox of Matlab, the inner diameter of rotor and the bearing span are optimized by simplex method. The analysis results show that the stiffness of spindle bearings is obviously influenced by the working speed and inner ring centrifugation, which should be taken into consideration during the dynamic analysis of a high-speed rotor-ball bearing system, and the first critical speed of the rotor-ball bearing system increases by 7.65% after optimization.

Keywords: high-speed rotor-ball bearing system; angular contact ball bearing; dynamic stiffness; critical speed

在高速球轴承-转子系统中, 应用最为广泛的轴承是角接触球轴承, 因此研究高速转子系统的动态特性必须先确定轴承的动态特性。基于 Hertz 接触理论, Harris 等人提出了球轴承的沟道控制理论,

建立了球轴承的拟静力学模型^[1]。罗继伟等人对滚动轴承的静、动态特性进行了研究^[2]。李松生等人对主轴轴承动态刚度的特性进行了详细的分析计算,并将结果用于轴承-转子系统的动态分析^[3]。

高速球轴承-转子系统动态分析的一般方法是将转子视为弹性梁^[3]、轴承视为非线性弹簧,使用有限元或传递矩阵等方法来完成转子系统的动态分析。Lin 等人提出了热-力耦合转子系统的计算模型^[4],但计算模型中的轴承刚度是通过经验公式确定的。Cao 等人建立了包括球轴承、转子、轴承座在内的转子系统的有限元模型,并考虑了转子和轴承的离心效应及陀螺运动的影响^[5]。Jiang 等人分析了电机转子的尺寸及轴承跨距等因素对主轴临界转速的影响^[6]。

为了便于分析,本文对高速主轴单元做了简化,忽略了温升对转子系统动态性能的影响,以及转子变形阻尼和轴承内油膜阻尼的影响。

1 球滚动体的运动及受力分析

1.1 球滚动体的运动

假设轴承的外圈固定、内圈以角速度 ω 匀速稳定旋转,球滚动体的公转角速度 ω_m 与内圈角速度 ω 的比值为

$$\left(\frac{\omega_m}{\omega}\right)_j = \frac{1 - \gamma' \cos \alpha_{ij}}{1 + \cos(\alpha_{ij} - \alpha_{oj})} \quad (1)$$

式中: $j=1,2,\dots,N$, N 为球数; γ' 为球径 D 与轴承节圆直径 d_m 的比值; α_{ij} 、 α_{oj} 分别为球滚动体与内、外沟道的接触角。

球滚动体自转角速度 ω_b 与 ω 的关系为

$$\left(\frac{\omega_b}{\omega}\right)_j = 1 / [(\cos \alpha_{oj} + \tan \beta_j \sin \alpha_{oj}) / (1 + \gamma' \cos \alpha_{oj}) + (\cos \alpha_{ij} + \tan \beta_j \sin \alpha_{ij}) / (1 - \gamma' \cos \alpha_{ij})] \gamma' \cos \beta_j \quad (2)$$

式中: β_j 为球滚动体自转轴与垂直于其公转半径的平面夹角,可由外圈沟道控制理论^[1]求出。

1.2 球滚动体的受力分析

轴承内部的运动会使球滚动体产生惯性力,通过受力分析可以建立球滚动体的平衡方程。

1.2.1 球滚动体的力平衡方程 高速运转时球滚动体的受力如图 1 所示。图 1 中球滚动体所受各种力的计算公式如下

$$F_{cj} = \frac{1}{12} \rho_b \pi D^3 d_m \omega^2 \left(\frac{\omega_m}{\omega}\right)_j^2 \quad (3)$$

$$M_{gj} = J \left(\frac{\omega_m}{\omega}\right)_j \left(\frac{\omega_b}{\omega}\right)_j \omega^2 \sin \beta_j \quad (4)$$

式中: M_{gj} 为陀螺力矩; F_{cj} 为离心力; ρ_b 为球的密度; J 为球滚动体的转动惯量。

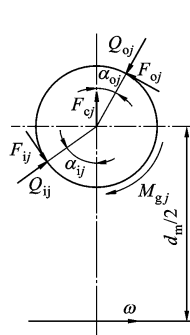


图 1 球滚动体受力图

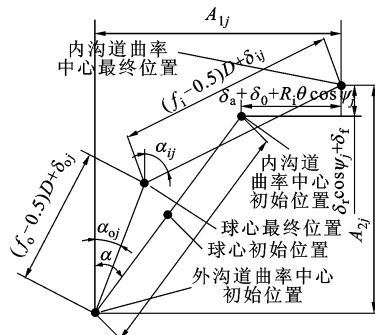


图 2 有、无载荷时球中心和沟道曲率中心的位置

由外圈滚道控制理论,陀螺力矩被球滚动体与外圈滚道的摩擦力抵消,因此 $F_{ij} = 0$ 。外滚道摩擦力为

$$F_{oj} = 2M_{gj}/D \quad (5)$$

假设球滚动体与内、外滚道的弹性趋近量分别为 δ_{ij} 、 δ_{oj} , $Q_{ij} = K_{ij} \delta_{ij}^{3/2}$, $Q_{oj} = K_{oj} \delta_{oj}^{3/2}$; K_{ij} 、 K_{oj} 分别为球滚动体与内、外圈滚道的刚度系数。根据图 1,可以建立球滚动体的力平衡方程

$$Q_{ij} \sin \alpha_{ij} - Q_{oj} \sin \alpha_{oj} - F_{oj} \cos \alpha_{oj} = 0 \quad (6)$$

$$Q_{ij} \cos \alpha_{ij} - Q_{oj} \cos \alpha_{oj} + F_{oj} \sin \alpha_{oj} + F_{cj} = 0 \quad (7)$$

1.2.2 位移协调方程 假设内圈相对外圈产生的整体径向、轴向位移及偏转角分别为 δ_r 、 δ_a 和 θ 。球滚动体中心和沟道曲率中心的位置关系如图 2 所示。内、外沟道曲率中心距离的轴向分量与径向分量分别为

$$A_{1j} = A_0 \sin \alpha + \delta_a + \delta_0 + \theta R_i \cos \Psi_j \quad (8)$$

$$A_{2j} = A_0 \cos \alpha + \delta_r \cos \Psi_j + \delta_i \quad (9)$$

式中: α 为载荷作用前球轴承的初始接触角; δ_0 为由轴向预紧载荷引起的轴向位移。

由于离心效应,内圈会产生径向位移

$$\delta_i = [(3 + \nu_i) d^2 d_i + (1 - \nu_i) d_i^3] \rho_i \omega^2 / 16 E_i \quad (10)$$

式中: ρ_i 、 E_i 、 ν_i 为内圈的密度、弹性模量、泊松比; d 、 d_i 为轴承内径及内圈沟道直径。

根据图 2,球滚动体处的位移协调方程如下

$$\begin{aligned} & ((f_o - 0.5)D + \delta_{oj})\sin\alpha_{oj} + \\ & ((f_i - 0.5)D + \delta_{ij})\sin\alpha_{ij} - A_{1j} = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & ((f_o - 0.5)D + \delta_{oj})\cos\alpha_{oj} + \\ & ((f_i - 0.5)D + \delta_{ij})\cos\alpha_{ij} - A_{2j} = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

2 轴承(组)的整体受力分析

根据所有球滚动体对轴承内圈合力为 0 的平衡条件,建立轴承内圈整体力平衡方程

$$F_r - \sum_{j=1}^N Q_{ij} \cos\alpha_{ij} \cos\Psi_j = 0 \quad (13)$$

$$F_a - \sum_{j=1}^N Q_{ij} \sin\alpha_{ij} = 0 \quad (14)$$

$$M_m - \sum_{j=1}^N Q_{ij} \sin\alpha_{ij} R_i \cos\Psi_j = 0 \quad (15)$$

式中: F_r 、 F_a 与 M_m 分别为作用于轴承内圈的径向力、轴向力与弯矩。式(13)~式(15)是以 δ_r 、 δ_a 和 θ 为未知量的方程组,求解后便可得到轴承的相关动态参数及动刚度,具体数值算法的步骤如下。

步骤 1 根据文献[1]中相关的经验公式给出 δ_r 、 δ_a 的初始值,并将 θ 取值为 0。

步骤 2 由式(8)、式(9)计算相应的 A_{1j} 、 A_{2j} ,给出 δ_{ij} 、 δ_{oj} 、 α_{ij} 、 α_{oj} 的初始值,计算 Q_{ij} 、 Q_{oj} 与 F_{oj} ,对式(6)、式(7)、式(11)、式(12)进行计算,直到 δ_{ij} 、 δ_{oj} 、 α_{ij} 、 α_{oj} 满足预先设定的精度。

步骤 3 根据式(13)~式(15)调整 δ_r 、 δ_a 和 θ 的值,并回到步骤 2 进行迭代,直到 δ_r 、 δ_a 、 θ 满足预先设定的精度。

步骤 4 求出 δ_r 、 δ_a 、 θ 后,分别给 1 个微小增量,并求出这种情况下轴承内圈的受力增量 ΔF ,用差分法求得轴承的刚度 $K=\Delta F/\Delta$ 。

对于轴承组,不同配置方式下轴承组中每列轴承所加载荷分量的正负方向见表 1^[2]。表 1 中, $Q_{rj}=Q_{ij}\cos\alpha_{ij}\cos\Psi_j$, $Q_{aj}=Q_{ij}\sin\alpha_{ij}\cos\Psi_j$ 分别为球滚动体与内滚道接触载荷的径向及轴向分量; $M_{rj}=0.5d_c\cos\alpha_{ij}\cos\Psi_j$, $M_{aj}=0.5d_m\sin\alpha_{ij}\cos\Psi_j$ 分别为 Q_{rj} 、 Q_{aj} 引起的力矩分量。

对于轴承组的每列轴承,可按单个轴承进行分析,但由于轴承组中心距 d_c 的存在, θ 不仅会在位置角 Ψ_j 处引起轴承内、外圈的相对轴向位移,还会引起相对径向位移,轴承组所受外力矩由接触载荷的轴向分量与径向分量共同承担。

按照单个轴承的动态分析,求出第 k 列轴承的球滚动体与内滚道的接触载荷 $Q_{k,ij}$ 与接触角 $\alpha_{k,ij}$,然后按轴承的组配方式由表 1 选择相应载荷分量的

表 1 每列轴承所加载荷分量与外载荷的方向

组配方式	背对背		面对面		串联	
轴承列号	1	2	1	2	1	2
Q_{rj} 与外载荷的方向	+	+	+	+	+	+
Q_{aj} 与外载荷的方向	+	-	-	+	+	+
M_{rj} 与外载荷的方向	+	-	+	-	+	-
M_{aj} 与外载荷的方向	+	-	-	+	+	+

注:“+”号表示两列轴承力与力矩的方向相同;“-”号表示两列轴承力与力矩的方向相反。

正负并叠加,得到轴承组的整体平衡方程

$$F_r - \sum_{k=1}^2 \left(\sum_{j=1}^N Q_{k,ij} \cos\alpha_{k,ij} \cos\psi_j \right) = 0 \quad (16)$$

$$F_a - \sum_{k=1}^2 \left(\sum_{j=1}^N Q_{k,ij} \sin\alpha_{k,ij} \right) = 0 \quad (17)$$

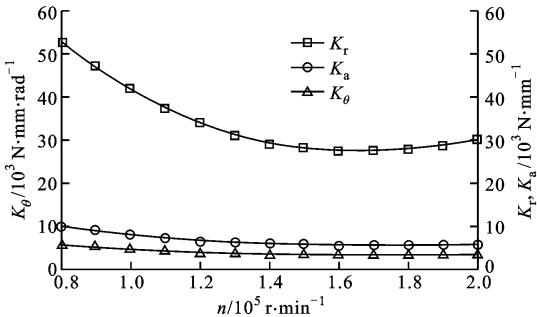
$$\begin{aligned} M_m - \sum_{k=1}^2 \left(\sum_{j=1}^N Q_{k,ij} (0.5d_m \sin\alpha_{k,ij} + \right. \\ \left. 0.5d_c \cos\alpha_{k,ij}) \cos\Psi_j \right) = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

式(16)~式(18)是以 δ_r 、 δ_a 、 θ 为未知变量的非线性方程组,可以先将每列轴承按照步骤 1、步骤 2 进行分析计算,然后根据式(16)~式(18)对 δ_r 、 δ_a 、 θ 进行调整,直到满足给定的精度要求,然后运用差分法求出轴承组的动刚度。

3 角接触球轴承算例的分析

选取 B71900C/P4 型号的轴承进行分析,轴承节圆直径、球径、内径与内圈沟道直径分别为 16、3.15、10 和 12 mm,接触角为 15°,球数为 11;套圈材料的弹性模量、泊松比、密度分别为 206 GPa、0.3、7 850 kg/m³,球滚动体材料的弹性模量、泊松比、密度分别为 320 GPa、0.25、3 200 kg/m³,轴向预紧力为 70 N。运用本文编制的数值计算程序进行分析,得到的轴承刚度特性如图 3 所示。

将 B71900C/P4 型号的轴承以背对背方式装配,两列轴承的 $d_c=6$ mm,预紧力 $F_0=70$ N,轴向外载荷 $F_a=50$ N,用本文编制的程序,得到的动刚度曲线如图 4 所示。在实际工作中,由于发热、润滑等因素的影响,轴承的转速不能高于极限转速,因此可忽略轴承发热及润滑对转速的限制,并在转速 0



K_r 、 K_a 、 K_θ ：分别为轴承径向刚度、轴向刚度及角刚度； n ：轴承转速
图 3 轴承刚度与转速的关系

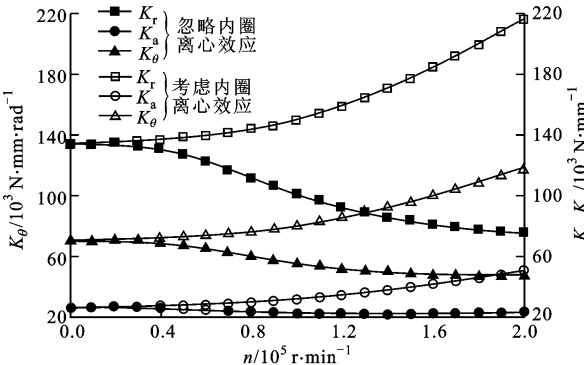


图 4 不同轴承内圈离心效应的轴承组刚度

~200 10³ r/min 之间分析轴承的动刚度。

如图 3 所示,轴承刚度随转速呈非线性变化。对于单个角接触球轴承,随着转速的不断上升,轴承的轴向刚度与角刚度变化不大,但径向刚度变化较明显,呈先下降后上升的趋势,这与文献[3,6]的分析结果是一致的。如图 4 所示,轴承组动刚度随转速升高而增大,转速越高,变化趋势越明显,且轴承组的角刚度较单个轴承明显增大。从图 4 可以看出,离心效应对轴向刚度和角刚度的影响相对较小,但对径向刚度影响很大。因此,在计算高速情况下的轴承(组)动刚度、尤其是径向刚度时,必须考虑内圈离心效应的影响。

4 轴承-转子系统的临界转速分析及优化

在得到梁单元的刚度阵和质量阵后,将各单元按照对号入座方法组装后,可得到转子系统的整体质量矩阵与刚度矩阵。对于电机转子等轴上的附加零件,将其质量按等效原则缩聚于单元两端节点处,然后叠加到整体质量矩阵 $\mathbf{M}$ 对应的节点处,集中点的质量也需按照节点对应叠加到 $\mathbf{M}$ 中。对支承轴承,求出刚度矩阵 $\mathbf{K}_b = [\mathbf{K}_{rr}, \mathbf{K}_{r\theta}, \mathbf{K}_{\theta r}, \mathbf{K}_{\theta\theta}]$ 后,将其叠

加到整体刚度矩阵 $\mathbf{K}$ 中相应的节点处。轴承-转子系统的无阻尼自由振动微分方程为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{0} \tag{19}$$

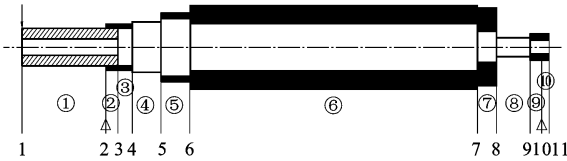
求解式(19)的特征值便可得到转子系统的各阶固有频率。

轴承(组)刚度随转速呈非线性变化,因而转速不同,按式(19)求出的系统固有频率也不同,但临界转速是与转子系统固有频率相等的工作转速。本文通过作图法来确定系统的临界转速,即先计算出轴承-转子系统在一系列转速下的固有频率,并作相应曲线,然后再作一条过原点且斜率为 1 的直线,两者交点对应的转速便为临界转速。以轴承跨距及转子内径为设计变量、以一阶临界转速最高为优化目标,可对转子系统进行优化。

5 主轴单元算例分析

本文以算例 1 验证了转子系统动态特性分析程序的正确性,然后对算例 2 中含轴承组的转子系统进行了分析和优化。

算例 1 文献[7]给出的轴系单元如图 5 所示,其前、后端各用一套 B7100C 轴承支承,轴段采用钢材,轴承位于节点 2 与节点 10 处。



①~⑩：有限元模型的单元编号；1~11：有限元模型的节点编号
图 5 轴系单元示意图[7]

运用本文所编制的程序计算转子系统的前两阶固有频率,计算结果如表 2 所示,两者吻合得较好。由于建立的转子系统模型中没有考虑转子本身的离心效应与陀螺效应,因此求出的固有频率较实验值偏大。另外,转子实际工作时轴承的润滑、发热及系统的阻尼也会对系统固有频率产生一定的影响。

表 2 前两阶固有频率计算与实验结果的对比

固有频率 阶数	f/Hz		相对误差 /%
	文献[7]实验	本文计算	
一阶	1 990	2 032.6	2.14
二阶	4 000	4 317.0	7.93

算例 2 如图 6 所示,某轴承-转子系统的前、后端轴承的型号为 B71900C,节点 2 处的 2 个 B71900C 轴

承以背对背方式组配,节点 9 处由单个轴承支承,轴承与轴承组的预紧力为 70 N。

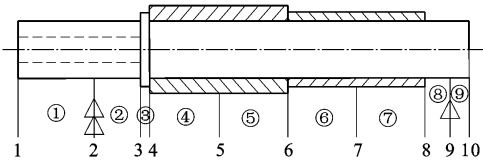


图 6 电主轴单元示意图

当主轴前、后轴承的跨距为 55 mm、转轴内径为 5 mm 时,运用本文编制的程序计算得到了主轴的一、二阶临界转速(见图 7),主轴一阶临界转速与轴承跨距及转子内径的关系如图 8 所示。对轴承跨距及转子内径进行优化,结果如表 3 所示,优化后主轴的一阶临界转速较优化前提高了 7.65%。

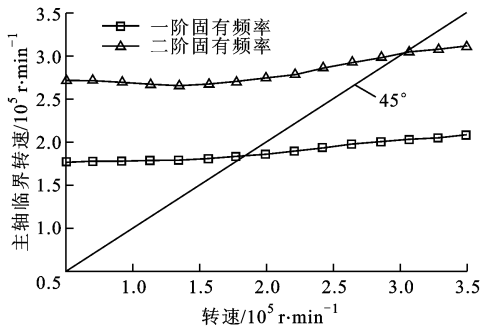


图 7 主轴的一、二阶临界转速曲线

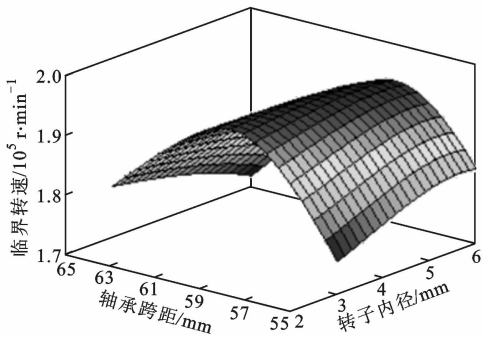


图 8 临界转速与轴承跨距及转子内径的关系

表 3 优化前后结果对比

状态	轴承跨距 /mm	转子内径 /mm	一阶临界转速 /r · min ⁻¹
优化前	55.0	5.00	180 570
优化后	58.9	4.75	194 380

6 结 论

- (1)由于角接触球轴承(组)是一种精细复杂的部件,难以得到其动刚度的解析解,而经验公式只适用于转速较低的工况,因此在高速工况下,利用数值方法求解动刚度更加符合工程实际。
- (2)轴承组的动特性并不是单个轴承动态特性的简单叠加,轴承组的组配方式不同,计算出的动刚度也不同,因此应对轴承组的动态特性进行分析。
- (3)由于在高速工况下,转速与轴承内圈离心效应对轴承(组)刚度影响很大,因此在分析轴承-转子系统的动态特性时,必须考虑主轴转速的影响。
- (4)本文通过优化轴承跨距等参数,大大提高了球轴承-转子系统的临界转速。

参考文献:

[1] HARRIS T A, KOTZALAS M N. 滚动轴承分析: 轴承技术的高等概念 [M]. 5 版. 罗继伟, 李齐顺, 杨成启, 等译. 北京: 机械工业出版社, 2009: 42-67.

[2] 罗继伟, 罗天宇. 滚动轴承分析计算与应用 [M]. 北京: 机械工业出版社, 2009: 33-54.

[3] 李松生. 超高速电主轴球轴承-转子系统动力学性能的研究 [D]: 上海: 上海大学, 2006.

[4] LIN Chiwei, TU J F. Model-based design of motorized spindle systems to improve dynamic performance at high speeds [J]. Journal of Manufacturing Processes, 2007, 9(2): 94-108.

[5] CAO Yuzhong, ALTINTAS Y. A general method for the modeling of spindle-bearing systems [J]. ASME Journal of Mechanical Design, 2004, 126(6): 1089-1104.

[6] JIANG Shuyun, ZHENG Shufei. Dynamic design of a high-speed motorized spindle-bearing system [J]. ASME Journal of Mechanical Design, 2010, 132(3): 1-5.

[7] 胡志刚, 徐诚, 王永娟. 有限元迭代法在电主轴轴承转子动静特性分析中的运用 [J]. 机械科学与技术, 2003, 22(6): 917-919.

HU Zhigang, XU Cheng, WANG Yongjuan. A finite-element iterative method for analysis of static-dynamic characteristic of shaft rotor in motorized spindle [J]. Mechanical Science and Technology, 2003, 22(6): 917-919.

(编辑 管咏梅)